

Steuern

Erste Zone (Grundfreibetrag):

Bis zu einem zvE von 8.004 € fällt keine Steuer an.

Zweite Zone: zvE von 8.005 € bis 13.469 €

$$\text{StB} = (912,17 y + 1400) y$$

Dabei ist y ein Zehntausendstel von (zvE - 8.004).

Vierte Zone: zvE von 52.882 € bis 250.730 €

$$\text{StB} = 0,42 \text{ zvE} - 8172$$

Dritte Zone: zvE von 13.470 € bis 52.881 €

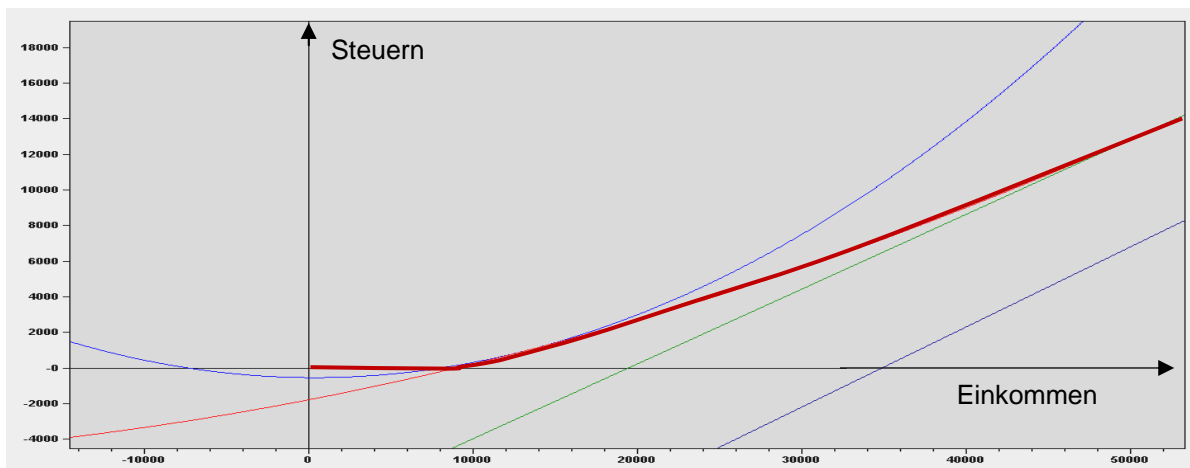
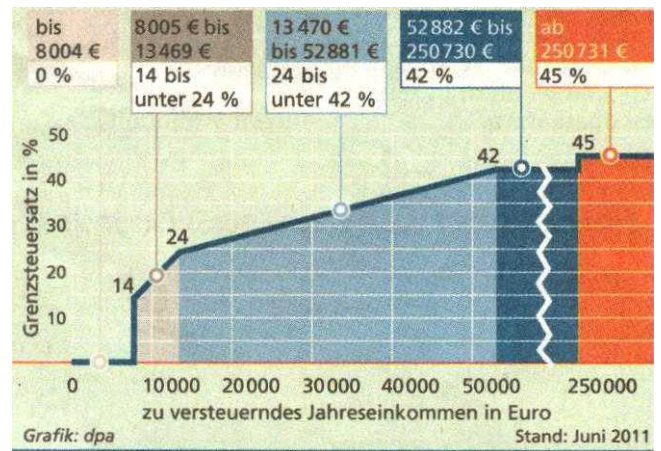
$$\text{StB} = (228,74 z + 2397) z + 1038$$

Dabei ist z ein Zehntausendstel von (zvE - 13.469):

Fünfte Zone: zvE ab 250.731 €

$$\text{StB} = 0,45 \text{ zvE} - 15694$$

StB: Steuerbetrag; zvE: zu versteuerndes Einkommen



Funktionenlehre, Differenzial- und Integralrechnung
am umstrittenen Thema Steuern

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Einleitung | 3 |
| I Theorie und Praxis der Einkommensbesteuerung | 6 |
| II Einkommensteuertarife | 8 |
| 1. Einkommensteuertarif 1998 | 8 |
| 2. Steuerfunktion in Abhängigkeit vom Einkommen | 11 |
| 3. Progression im Steuertarif | 13 |
| 4. Der Splittingtarif | 14 |
| 5. Einkommensteuertarife 1986/87 und 1990 | 15 |
| 6. Inflation – "kalte Steuerprogression" ★ | 18 |
| III Der Durchschnittssteuersatz | 19 |
| 1. Geometrische Interpretation | 19 |
| 2. Durchschnittssteuersatzfunktion 1998 | 22 |
| IV Der Grenzsteuersatz | 24 |
| 1. Der Grenzsteuersatz – von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung | 24 |
| 2. Grenzsteuersatzfunktion 1998 | 26 |
| 3. Steuerprogression für den Grenzsteuersatz | 27 |
| V Entwicklung der Steuerfunktion aus Eckdaten | 30 |
| 1. Entwicklung der Steuerfunktion 1990 | 30 |
| 2. Entwicklung der Steuerfunktion 1998 | 32 |
| VI Entwicklung aus der Grenzsteuersatzfunktion | 35 |
| 1. Geplante Steuerreform 1999 | 35 |
| 2. Steuertarif 1997 | 39 |
| 3. Grenzsteuersatzfunktion 1990 | 41 |
| 4. Grenzsteuersatzfunktion 1998 | 44 |
| VII Aktuelle Daten zu VI | 47 |
| 1. Klausuraufgabe (Steuerplan 2005) | 47 |
| 2. Steuerdebatte 2011 | 51 |
| VIII Werkzeuge zur Analyse von Steuerfunktionen | 72 |
| Initiative zur Verbesserung des Mathematikunterrichts | 81 |
| MUED | 83 |

Steuern

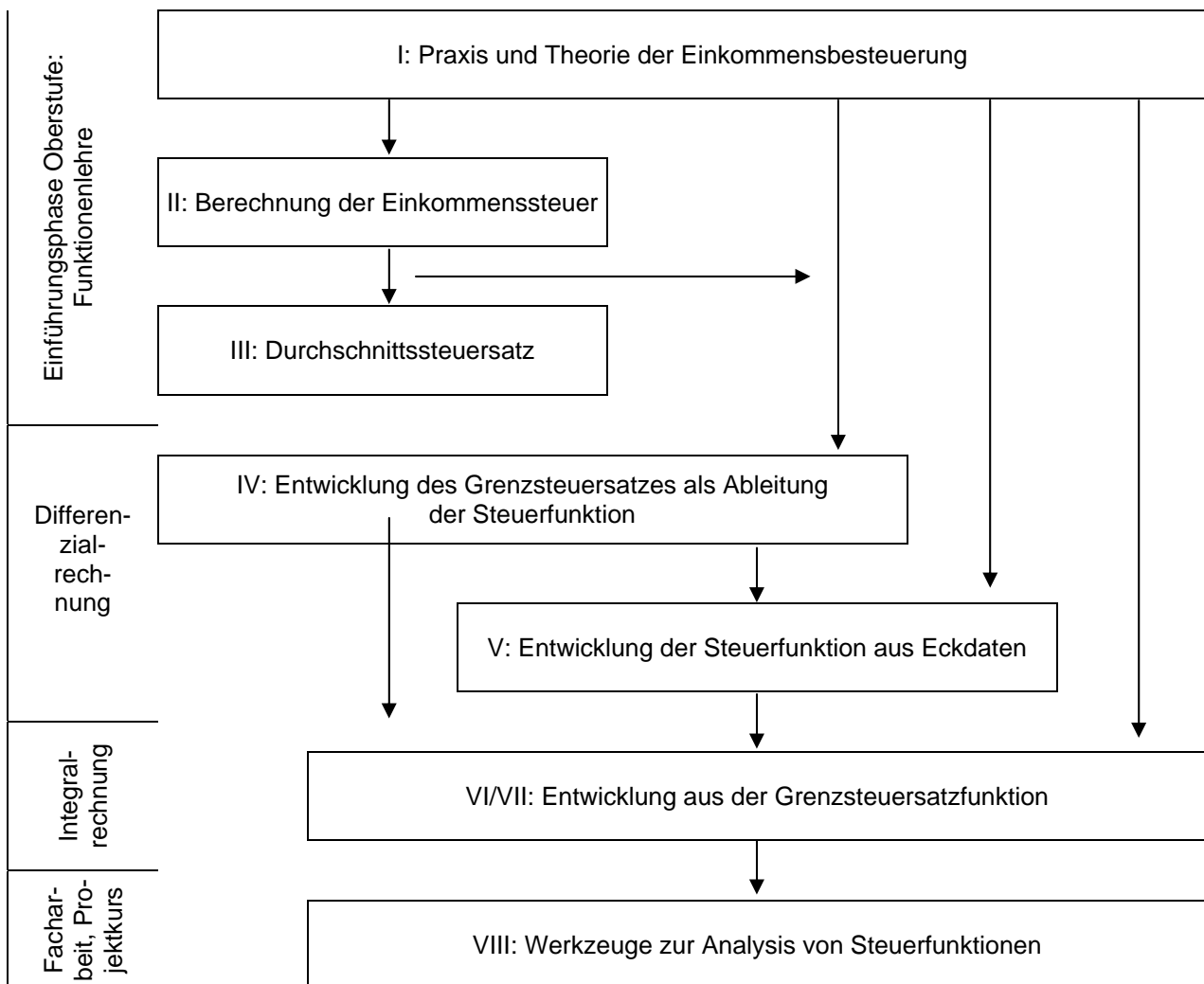
Preis: 16,00 €

ISBN 978-3-93019-75-0

Copyright bei den Autor/innen

Vervielfältigung für schulische Zwecke erlaubt.

Das folgende Flussdiagramm zeigt im Überblick, an welchen Stellen und in welcher Reihenfolge die jeweiligen Unterrichtssequenzen durchgeführt werden können.



Das Material können Sie bearbeiten lassen:

- ★ bei der Funktionenbehandlung zu Beginn der Oberstufe (I/II; I - III). Der Einstieg erfolgt über die im Einkommenssteuergesetz vorgegebene stückweise definierte Steuerfunktion. Für die Darstellung als Funktion $s(x)$ des Einkommens x sind komplexe Termumformungen, Umgang mit Zehnerpotenzen und mit dem Taschenrechner nötig, d. h. sie können hier wiederholt und geübt werden. Zehnerpotenzen-Umgang beim Taschenrechnergebrauch sind auch bei konkreten Berechnungen der Steuer nötig. Dasselbe gilt für die – hier auch sinnvolle – Berechnung des Durchschnittssteuersatzes $\bar{s}(x)$. Für die grafische Darstellung der beiden Funktionen $s(x)$ und $\bar{s}(x)$ bietet sich die Nutzung eines Funktionenplotters an. Für den Vergleich historischer Steuerfunktionen kann man sich die Termumformungen vom Gesetzestext bis $s(x)$ und konkrete Funktionswert-Berechnungen gut von einem Computer-Algebra-System abnehmen lassen. Es kommen vor: Definitions-, Wertebereich, diskret/kontinuierlich, Treppenfunktion; Taschenrechnergebrauch, u. a. 10er-Potenz-Tasten-Benutzung; "quasi-stetige" Grafen, Funktionen-Plotter; CAS.

- ★ bei der Untersuchung ganzrationaler Funktionen (I/IV). Nach einer kurzen Einführung mit I können Sie die Steuerfunktion direkt vorgeben und die 1. Ableitung als gute Näherung für den Grenzsteuersatz einführen und berechnen lassen. Bei der Termaufstellung der verschiedenen Größen sind Computer-Algebra-Systeme, für die grafischen Darstellungen Funktionenplotter arbeitserleichternd. Will man mehrere Steuertarife vergleichen, wird die entsprechende PC-Nutzung nötig. Nötig sind: Differenzenquotient, Differentialquotient, Zulässigkeit der Grenzwertbildung (Stetigkeit/Differenzierbarkeit), Grenzbelastung; Funktionen-Plotter; CAS.
- ★ bei der Funktionsbestimmung (I/V). Nach einer kurzen Einführung mit I und der Erläuterung des Grenzsteuersatzes kann direkt die Steuerfunktion aus den politischen Rahmenbedingungen rekonstruiert werden. Es kommt vor: Aufstellen der Bedingungen an die Funktion und Übersetzen in Gleichungen, Wahl eines geeigneten Funktionsansatzes und Aufstellen eines Gleichungssystems zur Bestimmung der Koeffizienten, Lösen von Gleichungssystemen von Hand oder mit einem grafikfähigen Taschenrechner.
- ★ bei der Integralrechnung (I/VI/VII). Nach einer kurzen Einführung mit Materialien aus I können die Skizzen in Zeitungsveröffentlichungen als Grenzsteuersatz-Funktionsgraf aufgeklärt werden. Aus der ersten Ableitungsfunktion lässt sich durch Integration und Konstanten-Anpassung die Steuerfunktion rekonstruieren. Hier gibt es Anlässe, Zeitungsmeldungen zu korrigieren und zu bewerten.
- ★ in Facharbeiten oder Projektkursen wie in NRW (I bis VIII). Über die in I bis VII benutzten Werkzeuge hinaus können Schüler/innen auch weitergehende Analyseinstrumente nutzen und die Ergebnisse grafisch darstellen und inhaltlich auswerten. Nötig ist dann ein CAS.

An mehreren Stellen bietet es sich an – besonders wenn mehrere Steuertarife verglichen werden sollen – arbeitsteilig zu arbeiten, etwa im Gruppenpuzzle. Das Verfahren ist hier im Kapitel VII/2 (Steuerdebatte 2011) exemplarisch ausgeführt.

Gruppe A

$$4. \ a) \quad St'(x) = \begin{cases} \text{I: } 0 & \text{für } 0 \text{ € bis } 8004 \text{ €} \\ \text{II: Gerade von } 0,14 \text{ bis } 0,24 & \text{für } 8005 \text{ € bis } 13\,469 \text{ €} \\ \text{III: Gerade von } 0,24 \text{ bis } 0,42 & \text{für } 13\,470 \text{ € bis } 52\,881 \text{ €} \\ \text{IV: } 0,42 & \text{für } 52\,882 \text{ € bis } 250\,730 \text{ €} \\ \text{V: } 0,45 & \text{ab } 250\,731 \text{ €} \end{cases}$$

zu II: $St'_{II}(x) = a_{II} \cdot x + b_{II}$
 $a_{II} = \frac{0,24 - 0,14}{13\,469 - 8005} \approx 1,83 \cdot 10^{-5}$
 $St'_{II}(8005) = 1,83 \cdot 10^{-5} \cdot 8005 + b_{II} = 0,14$
 $b_{II} \approx -6,49 \cdot 10^{-3}$
 Insgesamt: $St'_{II}(x) = 1,83 \cdot 10^{-5} x - 6,49 \cdot 10^{-3}$

zu III: $St'_{III}(x) = a_{III} \cdot x + b_{III}$
 $a_{III} = \frac{0,42 - 0,24}{52\,881 - 13\,470} \approx 4,57 \cdot 10^{-6}$
 $St'_{III}(13\,470) = 4,57 \cdot 10^{-6} \cdot 13\,470 + b_{III} = 0,24$
 $b_{III} \approx 0,1784$
 Insgesamt: $St'_{III}(x) = 4,57 \cdot 10^{-6} x + 0,1784$

$$St'(x) = \begin{cases} \text{I: } 0 & \text{für } 0 \text{ € bis } 8004 \text{ €} \\ \text{II: } 1,83 \cdot 10^{-5} x - 6,49 \cdot 10^{-3} & \text{für } 8005 \text{ € bis } 13\,469 \text{ €} \\ \text{III: } 4,57 \cdot 10^{-6} x + 0,1784 & \text{für } 13\,470 \text{ € bis } 52\,881 \text{ €} \\ \text{IV: } 0,42 & \text{für } 52\,882 \text{ € bis } 250\,730 \text{ €} \\ \text{V: } 0,45 & \text{ab } 250\,731 \text{ €} \end{cases}$$

$$b) \quad St(x) = \begin{cases} \text{I: } C_I & \text{für } 0 \text{ € bis } 8004 \text{ €} \\ \text{II: } 9,15 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 - 6,49 \cdot 10^{-3} x + C_{II} & \text{für } 8005 \text{ € bis } 13\,469 \text{ €} \\ \text{III: } 2,285 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 0,1784 x + C_{III} & \text{für } 13\,470 \text{ € bis } 52\,881 \text{ €} \\ \text{IV: } 0,42 x + C_{IV} & \text{für } 52\,882 \text{ € bis } 250\,730 \text{ €} \\ \text{V: } 0,45 x + C_V & \text{ab } 250\,731 \text{ €} \end{cases}$$

- $C_I = 0$ gilt wegen des "Steuerfreibetrages". Letzter Punkt im Intervall ist (8004|0).
- Die quadratische Funktion in II muss im letzten Punkt von I anschließen.
 $St_{II}(8004) = 9,15 \cdot 10^{-6} \cdot 8004^2 - 6,49 \cdot 10^{-3} \cdot 8004 + C_{II} = 0;$
 also $C_{II} \approx -534,24$.
 Der letzte Punkt im Intervall II lautet (13469|1038,28) wegen $St_{II}(13469) = 9,15 \cdot 10^{-6} \cdot 13469^2 - 6,49 \cdot 10^{-3} \cdot 13469 - 534,24 \approx 1038,28$.
- Die quadratische Funktion in III muss im letzten Punkt von II anschließen.
 $St_{III}(13469) = 2,285 \cdot 10^{-6} \cdot 13469^2 + 0,1784 \cdot 13469 + C_{III} = 1038,28$
 $C_{III} \approx -1779,12$
 Der letzte Punkt im Intervall III lautet (52881|14044,58), da
 $St_{III}(52881) = 2,285 \cdot 10^{-6} \cdot 52881^2 + 0,1784 \cdot 52881 - 1779,12 \approx 14044,62$.
- Die Gerade in IV muss am letzten Punkt in III anschließen.
 $St_{IV}(52881) = 0,42 \cdot 52881 + C_{IV} = 14044,62$
 $C_{IV} = -8165,40$
 Der letzte Punkt im Intervall IV lautet (250730|97141,20), denn
 $St_{IV}(250730) = 0,42 \cdot 250730 - 8165,40 = 97141,20$.

- Die Gerade im Intervall V muss durch den letzten Punkt von IV gehen.
 $St_V(250730) = 0,45 \cdot 250730 + C_V = 97\,141,20$
 $C_V = -15687,30$
- Die gesamte Steuerfunktion lautet

$$St(x) = \begin{cases} \text{I: } 0 & \text{für } 0 \text{ € bis } 8004 \text{ €} \\ \text{II: } 9,15 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 - 6,49 \cdot 10^{-3} x - 534,24 & \text{für } 8005 \text{ € bis } 13\,469 \text{ €} \\ \text{III: } 2,285 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 0,1784 x - 1779,12 & \text{für } 13\,470 \text{ € bis } 52\,881 \text{ €} \\ \text{IV: } 0,42 x - 8165,40 & \text{für } 52\,882 \text{ € bis } 250\,730 \text{ €} \\ \text{V: } 0,45 x - 15\,687,30 & \text{ab } 250\,731 \text{ €} \end{cases}$$

- c) Mit einem CAS leicht zu berechnen (z. B. Derive):
 Zone I: 0

$$\text{Zone II: } y = \frac{x-8004}{10\,000} = 10^{-4} \cdot x - 0,8004 \text{ mit } x = zVE$$

$$\begin{aligned} St_{II}(x) &= (912,17 \cdot (10^{-4} x - 0,8004) + 1400) \cdot (10^{-4} x - 0,8004) \\ &= 9,1217 \cdot 10^{-6} x^2 - 6,02 \cdot 10^{-3} x - 536,19 \end{aligned}$$

$$\text{Zone III: } z \approx \frac{x-13\,469}{10\,000} = 10^{-4} x - 1,3469$$

$$\begin{aligned} St_{III}(x) &= (228,74 \cdot (10^{-4} x - 1,3469) + 2397) \cdot (10^{-4} x - 1,3469) + 1038 \\ &= 2,874 \cdot 10^{-6} x^2 + 0,17808 \cdot x - 1775,55 \end{aligned}$$

$$\text{Zone IV: } St_{IV}(x) = 0,42 x - 8172$$

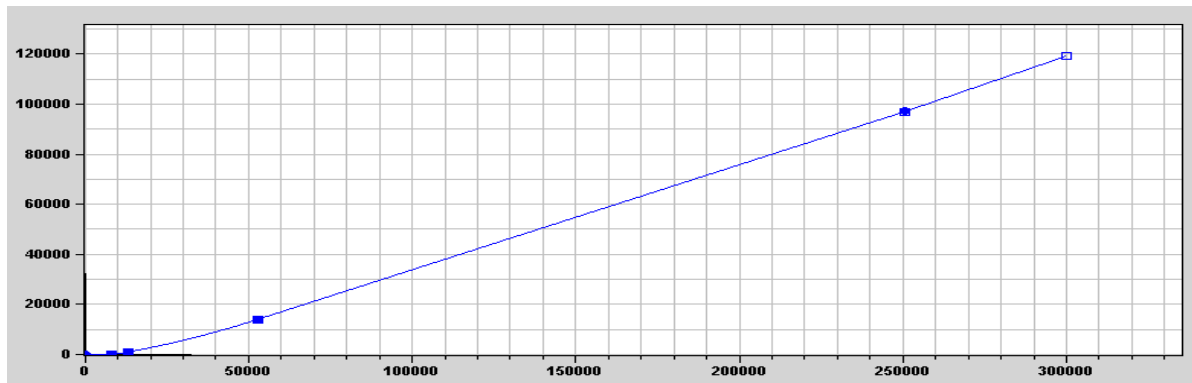
$$\text{Zone V: } St_V(x) = 0,45 x - 15694$$

Bis auf geringfügige Abweichungen stimmt die Steuerfunktion im Gesetz mit der oben berechneten überein.

Vor Aufgabe 5 und 6 erhält die Gruppe die Lösung zu 4b zur Eigenkontrolle und evtl. Korrektur, um die Weiterarbeit in 5. und 6 abzusichern.

5. a, b)

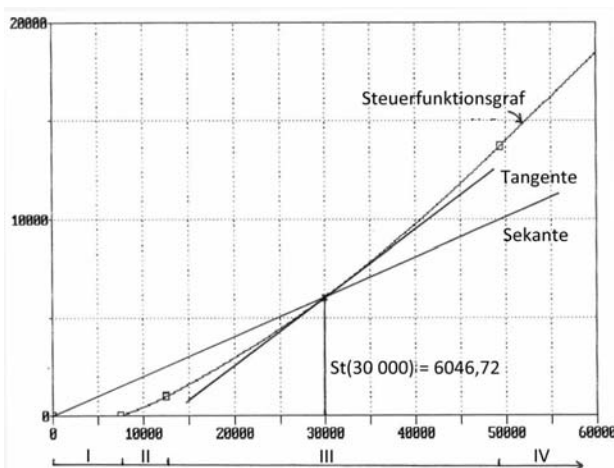
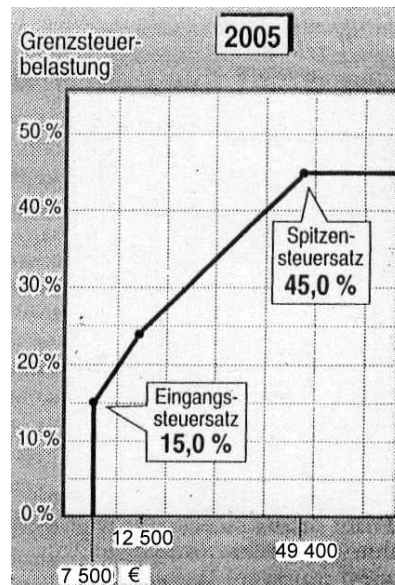
Steuerfunktion 2011



Suchen Sie nach relevanten Nutzungen der Analysis?

Wollen Sie exemplarisch zeigen, dass die additive Integrationskonstante nötig ist?

Hätten Sie gerne praxisrelevante Fragestellungen zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen?



Brauchen Sie für Ihre Schüler/innen Antworten auf die Frage: Wozu braucht man denn den ganzen "Analysiskram"?

Wollen Sie selber in den Wirtschaftswissenschaften übliche Termini wie Elastizitäten verstehen?

Benötigen Sie relevante Anwendungszusammenhänge, für die sinnvolle Argumentationskompetenzen trainiert werden?

Dann greifen Sie zu!

ISBN 978-3-930197-75-0



9

783930 197750

€ 16,00